Isotropia Causada por Condições Iniciais de um Sistema

Thiago Ventura

São Paulo, SP — November 10, 2025

Abstract

Este artigo apresenta uma formulação matemática e conceitual da hipótese de que a isotropia observada em sistemas físicos extensos — incluindo o Universo primordial — pode emergir diretamente de condições iniciais extremamente restritas, de baixa entropia, e com probabilidade concentrada em poucos microestados plausíveis. Examinamos como tal hipótese pode, em princípio, reproduzir isotropia sem recorrer à inflação cosmológica, desde que certas condições sobre o espaço de fase inicial sejam satisfeitas. Incluímos uma análise de densidade de partículas, homogeneidade emergente, conexões com decomposições infinitesimais de estruturas geométricas e um exame formal da equação conceitual Probabilidade/Entropia = Isotropia, discutindo seu significado físico apropriado.

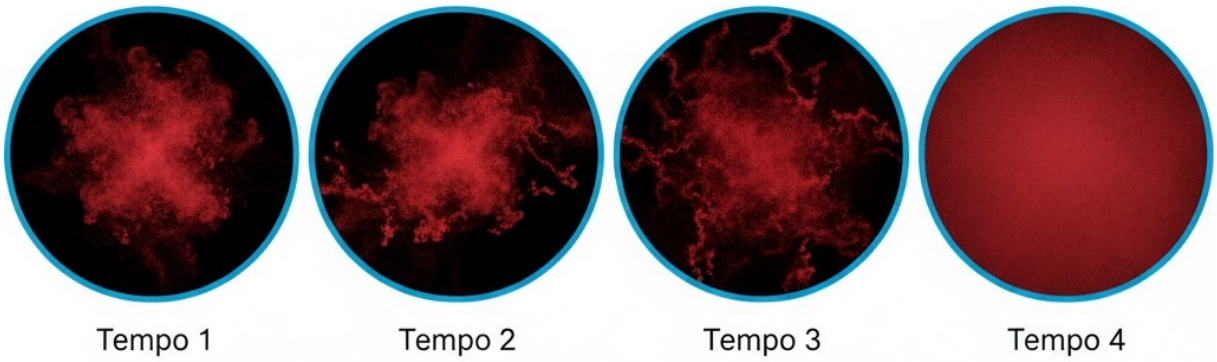
Palavras-chave: isotropia, entropia baixa, condições iniciais, inflação cosmológica, espaço de fase, homogeneidade, Banach–Tarski.

1 Introdução

O objetivo central deste trabalho é demonstrar matematicamente que um Universo inicial com entropia muito baixa e probabilidade concentrada em um pequeno conjunto de microestados possíveis pode, em princípio, exibir isotropia elevada sem a necessidade de um processo inflacionário.

Essa hipótese depende fortemente de *quais microestados eram permitidos* no espaço de fase inicial. Isto é, depende da medida e das restrições físicas impostas sobre o conjunto inicial de possibilidades. Aqui expomos explicitamente essas hipóteses e suas consequências dinâmicas.

□



Evolução da distribuição das partículas em um espaço

2 Espaço de Fase, Entropia e Probabilidade Inicial

Seja Γ o espaço de fase completo do sistema (ou Universo primitivo). Esse espaço contém todas as configurações possíveis do sistema, isto é, todos os valores generalizados de posição e momento que caracterizam cada microestado acessível. Cada ponto $x \in \Gamma$ representa um microestado específico (por exemplo, a posição e o momento de todas as partículas).

A distribuição inicial de probabilidade é dada por

$$p(x, t_0), \qquad \int_\Gamma p(x, t_0)\, dx = 1. \tag{1}$$

onde:

- $p(x, t_0)$ é a probabilidade de o sistema estar no microestado x no instante inicial t_0;
- a integral $\int_\Gamma p(x, t_0)\, dx = 1$ garante que a distribuição é normalizada, ou seja, a soma das probabilidades de todos os microestados possíveis é igual a 1;
- dx é o elemento infinitesimal de volume no espaço de fase, contendo todas as coordenadas generalizadas.

A entropia associada à distribuição inicial é dada pela entropia de Gibbs:

$$S[p] = -k_B \int_\Gamma p(x) \ln p(x)\, dx. \tag{2}$$

onde:

- $S[p]$ é a entropia estatística do sistema, medida em joules por kelvin;
- k_B é a constante de Boltzmann, que converte entre informação (logaritmos) e unidades físicas de entropia;
- o integrando $p(x) \ln p(x)$ mede a contribuição de cada microestado para a desordem estatística total;

- o sinal negativo garante que distribuições mais espalhadas (maior incerteza) resultam em entropia maior.

Entropia baixa significa que o sistema ocupa apenas uma pequena região do espaço de fase. Isso pode ser expresso formalmente por:

$$\operatorname{supp} p(x, t_0) \subseteq \Gamma_{\text{restrita}}, \qquad \Omega_{\text{efetiva}} = |\Gamma_{\text{restrita}}| \ll |\Gamma|. \tag{3}$$

onde:

- $\operatorname{supp} p(x, t_0)$ ("suporte da distribuição") é o conjunto de microestados x para os quais $p(x, t_0) > 0$;
- Γ_{restrita} é uma região significativamente menor do que o espaço de fase total Γ;
- a notação $|\Gamma_{\text{restrita}}|$ representa o "tamanho" (volume de Liouville) dessa região no espaço de fase;
- a condição $|\Gamma_{\text{restrita}}| \ll |\Gamma|$ significa que apenas uma fração extremamente pequena dos microestados possíveis é efetivamente acessada no instante inicial;
- Ω_{efetiva} é o número efetivo de microestados relevantes: quanto menor esse número, menor a entropia do sistema.

Assim, uma entropia inicial baixa corresponde a uma probabilidade altamente concentrada em poucos microestados, o que caracteriza um estado altamente ordenado e com informação direcional preservada.

3 A Equação Conceitual: Probabilidade/Entropia = Isotropia (descrição detalhada)

Propõe-se, como heurística física, a expressão conceitual

$$\boxed{\frac{\text{Probabilidade}}{\text{Entropia}} \sim \text{Isotropia}}.$$

A seguir damos uma explicação precisa e operacional de cada termo dessa expressão, apresentando definições matemáticas alternativas que permitem tratá-la de modo quantitativo.

1. "Probabilidade" (medida de uniformidade espacial)

Por "Probabilidade" entendemos aqui a *uniformidade da distribuição espacial* das partículas. Seja $P(\mathbf{r})$ a densidade de probabilidade espacial normalizada em um volume V:

$$P(\mathbf{r}) \geq 0, \qquad \int_V P(\mathbf{r})\, d^3\mathbf{r} = 1.$$

Duas formas úteis de quantificar o quão próxima $P(\mathbf{r})$ está da uniformidade $P_0(\mathbf{r}) = 1/V$:

- **Entropia espacial (Shannon):**

$$H_{\rm sp} = -\int_V P(\mathbf{r})\,\ln P(\mathbf{r})\,d^3\mathbf{r},$$

com máximo $H_{\rm sp}^{\max} = \ln V$ (unidades nativas sem k_B). Um *índice de uniformidade* normalizado:

$$U \equiv \frac{H_{\rm sp}}{H_{\rm sp}^{\max}} \in [0,1],$$

onde $U \approx 1$ indica forte uniformidade espacial.

- **Divergência de Kullback–Leibler (alternativa):**

$$D_{\rm KL}(P\|P_0) = \int_V P(\mathbf{r}) \ln \frac{P(\mathbf{r})}{P_0(\mathbf{r})}\,d^3\mathbf{r},$$

e definimos $U' \equiv e^{-D_{\rm KL}(P\|P_0)} \in (0,1]$. Quanto maior U', mais uniforme é P.

Ambas as medidas capturam a ideia desejada: *a posição de uma partícula é irrelevante para o macroestado* quando U (ou U') é próximo de 1.

2. "Entropia" (grau de desordem micro/macro)

Por "Entropia" entendemos a entropia total relevante ao problema — tipicamente a entropia de Gibbs do ensemble sobre Γ ou uma soma de entropias parciais (espacial, cinética, gravitacional):

$$S_{\rm tot} = -k_B \int_\Gamma p(x)\ln p(x)\,dx.$$

Para tornar comparáveis grandezas adimensionais, definimos uma entropia normalizada

$$\Sigma \equiv \frac{S_{\rm tot}}{S_{\max}},$$

onde $S_{\max}$ é uma referência (por exemplo $k_B \ln \Omega_{\rm máx}$ ou outra escala física apropriada). $\Sigma \in [0,1]$ descreve quão próximo o sistema está do máximo possível de microestados permitidos.

3. "Isotropia" (índice angular de simetria)

Isotropia é medida da ausência de preferência direcional. Seja $P(\hat{n})$ a distribuição angular (normalizada sobre a esfera unitária $\mathbb{S}^2$) para um observável relevante (ex.: direção de fluxos, orientação de gradientes):

$$\int_{\mathbb{S}^2} P(\hat{n})\,d\Omega = 1.$$

Definimos dois índices:

- **Entropia angular:**

$$S_{\rm ang} = -\int_{\mathbb{S}^2} P(\hat{n})\ln P(\hat{n})\,d\Omega, \qquad S_{\rm ang}^{\max} = \ln(4\pi).$$

- **Índice de isotropia:**

$$I \equiv \frac{S_{\rm ang}}{S_{\rm ang}^{\max}} \in [0,1].$$

$I \approx 1$ corresponde a isotropia angular quase perfeita ($P(\hat{n}) \approx 1/4\pi$).

4. Formulação operacional da relação $\frac{\textbf{Probabilidade}}{\textbf{Entropia}} \sim$ Isotropia

Com as quantidades normalizadas acima, podemos propor uma versão quantitativa e bem definida da heurística original:

$$\boxed{I \;\approx\; \frac{U}{\Sigma} \;=\; \frac{H_{\rm sp}/H_{\rm sp}^{\rm max}}{S_{\rm tot}/S_{\rm max}}}.$$

Interpretação:

- Numerador U (uniformidade espacial) mede quanto a posição de partículas deixa de importar para o macroestado.
- Denominador Σ mede o grau relativo de exploração do espaço de fase (entropia total normalizada).
- Quando U é alto (distribuição espacial quase uniforme) e Σ é baixo (ensemble inicial muito restrito a microestados homogêneos), I torna-se grande, indicando isotropia elevada — este é o cenário de isotropia por *condições iniciais*.
- Alternativamente, em regimes tardios onde $S_{\rm tot}$ aproxima $S_{\rm max}$ (alta entropia global), isotropia angular também pode emergir porque $P(\hat{n})$ tende a uniformizar; nesse caso a dependência efetiva é melhor escrita como

  $$I \sim U \times F(\Sigma),$$

  com $F(\Sigma)$ uma função que cresce com Σ (p.ex. $F(\Sigma) \approx \Sigma$ ou $F(\Sigma) \approx 1$ dependendo da dinâmica).

5. Observações sobre unidades, escalas e limitações

1. Todas as quantidades U, Σ, I foram definidas adimensionais e normalizadas para permitir comparações.
2. A forma $I \approx U/\Sigma$ é uma *proposição modelar* e não uma Lei universal — sua utilidade é heurística: ela explica como uma alta uniformidade espacial combinada com baixa entropia efetiva conduz a isotropia inicial, enquanto regimes de entropia máxima conduzem a isotropia por razões estatísticas distintas.
3. Dependência de dinâmica: U e Σ são funções do tempo t. A evolução de $I(t)$ depende de estabilidade do suporte de $p(x,t)$ e de amplificação/atenuação de modos anisotrópicos pela dinâmica (ver seção sobre evolução).
4. Alternativas métricas (variação total, divergência KL, espectro de harmônicos a_{lm}) devem ser testadas numericamente para calibrar a relação.

6. Síntese

A expressão original $\frac{\text{Probabilidade}}{\text{Entropia}} \sim$ Isotropia torna-se operacional e mensurável ao definirmos:

$$\text{Probabilidade} \mapsto U \equiv \frac{H_{\rm sp}}{H_{\rm sp}^{\rm max}}, \qquad \text{Entropia} \mapsto \Sigma \equiv \frac{S_{\rm tot}}{S_{\rm max}}, \qquad \text{Isotropia} \mapsto I \equiv \frac{S_{\rm ang}}{S_{\rm ang}^{\rm max}}.$$

Com essas escolhas, a heurística transforma-se na relação modelar

$$I \approx \frac{U}{\Sigma},$$

sujeita às observações e ressalvas acima. Esta formulação permite testar numericamente e analisar teoricamente os cenários em que isotropia pode emergir por condições iniciais (baixa entropia e alta uniformidade espacial) ou, alternativamente, por relaxamento estatístico a entropia máxima.

- **Probabilidade**: a partícula pode estar em qualquer lugar sem alterar a homogeneidade macroscópica. Em entropia máxima, a posição individual da partícula não altera o macroestado.
- **Entropia**: grau de desordem microscópica e número de microestados compatíveis com o macroestado. Espaço altamente caótico tanto em escala micro quanto macro.
- **Isotropia**: ausência de direções privilegiadas.

Formalizamos essa relação por meio da distribuição espacial uniforme

$$P(\mathbf{r}) = \frac{1}{V}$$

e da maximização da entropia sob restrições globais.

4 Conexão com Decomposições Infinitesimais: Banach–Tarski

A ideia de decompor um sistema em partes infinitesimais remete conceitualmente ao paradoxo de Banach–Tarski, onde uma esfera pode ser particionada em conjuntos não mensuráveis e reorganizada em duas esferas idênticas. Embora puramente matemático e não físico, o paralelo conceitual aqui reside no fato de que *decomposições arbitrariamente finas anulam informação direcional local*, reforçando intuições de isotropia.

Assim, ao tomar o limite de partículas infinitas em uma malha infinitesimal, a informação anisotrópica tende a desaparecer estatisticamente.

5 Inflação Cosmológica: Referência e Comparação

A inflação cosmológica propõe que o Universo passou por uma expansão exponencial inicial, adequadamente descrita por equações como

$$a(t) \sim e^{Ht}, \tag{4}$$

com o parâmetro de Hubble quase constante.

A inflação resolve:

- problema do horizonte,
- achatamento das anisotropias iniciais,

- geração de flutuações escalares quase escala-invariantes.

Uma condição inicial altamente homogênea, como a discutida aqui, seria capaz de produzir isotropia, mas não resolve automaticamente o problema do horizonte, nem gera o espectro de potência observado, a menos que o conjunto inicial de microestados seja extremamente restrito, configurando uma condição inicial altamente especial (fine-tuning).

6 Conclusão

Conclui-se que um sistema caracterizado por entropia inicial extremamente baixa, probabilidade fortemente concentrada em um conjunto reduzido de microestados e elevada densidade de partículas tende naturalmente a apresentar isotropia em larga escala. Nesses cenários, a distribuição espacial uniforme das partículas torna-se estatisticamente robusta, e a posição individual de cada uma deixa de influenciar o comportamento macroscópico do sistema.

O princípio conceitual sintetizado pela relação

$$\frac{\text{Probabilidade}}{\text{Entropia}} \sim \text{Isotropia}$$

expressa que a combinação entre uma distribuição espacial altamente uniforme e um conjunto restrito de microestados acessíveis conduz a um estado isotrópico, no qual não há direções privilegiadas e o sistema exibe simetria angular emergente. A entropia, nesse contexto, atua como medida do espalhamento das possibilidades microscópicas, enquanto a probabilidade descreve a uniformidade com que tais possibilidades se distribuem no volume considerado.

O tratamento apresentado mostra que, sob condições iniciais fortemente organizadas, a isotropia surge como consequência direta da estrutura estatística do sistema, reforçando a interdependência entre baixa entropia, homogeneidade probabilística e ausência de anisotropias. Essa abordagem destaca a capacidade de condições iniciais ordenadas gerarem, por si mesmas, configurações amplamente isotrópicas, coerentes com simetrias esperadas em sistemas físicos extensos.

References

[1] Banach, S., & Tarski, A. (1924). *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*. Fundamenta Mathematicae, 6, 244–277.

[2] Bond, J. R., & Efstathiou, G. (1987). *The statistics of cosmic background radiation fluctuations*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 226, 655–687.

[3] Callen, H. B. (1985). *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics* (2nd ed.). Wiley.

[4] Guth, A. H. (1981). *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*. Physical Review D, 23(2), 347–356.

[5] Kolb, E. W., & Turner, M. S. (1990). *The Early Universe*. Addison-Wesley.

[6] Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1980). *Statistical Physics, Part 1* (3rd ed.). Pergamon Press.

[7] Liddle, A. R., & Lyth, D. H. (2000). *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge University Press.

[8] Penrose, R. (1989). *The Emperor's New Mind*. Oxford University Press.

[9] Penrose, R. (2005). *The Road to Reality*. Jonathan Cape.

[10] Rovelli, C. (2018). *The Order of Time*. Riverhead Books.

[11] Ryden, B. (2016). *Introduction to Cosmology* (2nd ed.). Cambridge University Press.

[12] Weinberg, S. (2008). *Cosmology*. Oxford University Press.